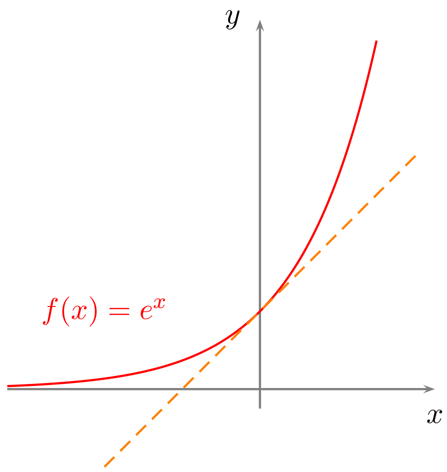
Semestervorkurs A:

Übungsaufgaben

Benjamin Hildebrandt



Übungsaufgaben zum
AMIV-Semestervorkurs in Analysis
an der ETH Zürich.

1 Aufgaben

1.1 Differentialrechnung

Ableitung bilden mittels Differentialquotient

Bilde die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{2}{x} + x^2$. Betrachte hierzu den Differentialquotienten und führe eine Grenzwertbetrachtung durch.

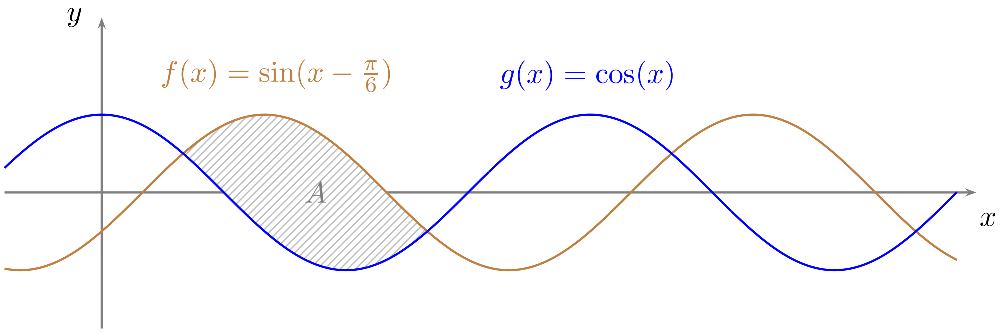
Bestimmung eines Steigungswinkels

Bestimme den Steigungswinkel der Tangente an den Graphen der Funktion $g(x) = \cos(\frac{\pi}{e}x) - \ln(x)$ an der Stelle $x_1 = 2e$.

1.2 Integralrechnung

Berechnung eines Flächeninhalts

Berechne den Flächeninhalt A der schraffierten Fläche in der folgenden Skizze:



1.3 Kurvendiskussion

Durchführung einer vollständigen Kurvendiskussion

Führe eine vollständige Kurvendiskussion für die Funktion $h(x) = \frac{4x^2-4x}{x^3-6x^2+12x-8}$ durch.

2 Lösungen

2.1 Differentialrechnung

Ableitung bilden mittels Differentialquotient

Zuerst bilden wir den Differentialquotienten gemäss Definition:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &:= \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{\left[\frac{2}{x_0+\Delta x}+(x_0+\Delta x)^2\right]-\left[\frac{2}{x_0}+(x_0)^2\right]}{\Delta x} \\
&= \frac{\left[\frac{2}{x_0+\Delta x}\right]-\left[\frac{2}{x_0}\right]}{\Delta x}+\frac{\left[(x_0+\Delta x)^2-(x_0)^2\right]}{\Delta x} \\
&= \frac{\frac{2\cdot x_0-2\cdot(x_0+\Delta x)}{x_0\cdot(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}+\frac{(x_0)^2+2\cdot x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-(x_0)^2}{\Delta x} \\
&= \frac{\frac{2\cdot x_0-2\cdot x_0-2\cdot\Delta x}{(x_0)^2+x_0\cdot\Delta x}}{\Delta x}+\frac{2\cdot x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \frac{\frac{-2\cdot\Delta x}{(x_0)^2+x_0\cdot\Delta x}}{\Delta x}+\frac{\Delta x\cdot(2\cdot x_0+\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \frac{-2}{(x_0)^2+x_0\cdot\Delta x}+2\cdot x_0+\Delta x
\end{aligned}
$$

Anschliessend führen wir die Grenzwertbetrachtung durch:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &:= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{x^2+x\cdot\Delta x}+2\cdot x+\Delta x \\
&= -\frac{2}{x^2}+2x
\end{aligned}
$$

Bestimmung eines Steigungswinkels

Wir bilden zuerst allgemein die Ableitung der Funktion $g(x)$:

$$g'(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{e}\cdot x\right)\cdot\frac{\pi}{e} - \frac{1}{x}$$

Nun berechnen wir ihren Wert an der Stelle $x_1 = 2e$:

$$\begin{aligned} g'(x_1) &= -\sin\left(\frac{\pi}{e}\cdot 2\cdot e\right)\cdot\frac{\pi}{e} - \frac{1}{2\cdot e} \\ &= -\frac{\pi}{e}\cdot\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} - \frac{1}{2e} \\ &= -\frac{1}{2e} \end{aligned}$$

Der Steigungswinkel α der Tangente an der Stelle x_1 ergibt sich dann aus der Formel:

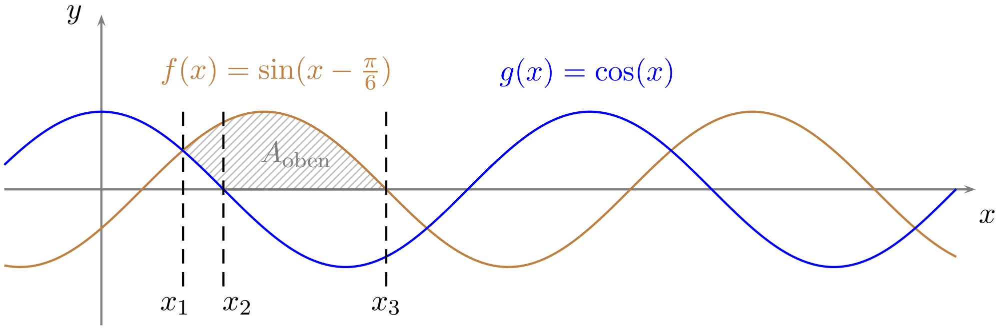
$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\Big(g'(x_1)\Big) \\ &= \arctan\left(-\frac{1}{2e}\right) \quad \approx -0,1819 \quad \widehat{=} \; -10,4225^\circ \end{aligned}$$

Anmerkung: Die Arcustangens-Funktion liefert den Winkel im Bogenmass. Die Umrechnung in das Gradmass erfolgt durch Multiplikation mit dem Faktor $\frac{360^\circ}{2\pi}$.

2.2 Integralrechnung

Berechnung eines Flächeninhalts

Zur Berechnung des Flächeninhalts nutzen wir die Integralrechnung. Wir stellen zunächst fest, dass die gesuchte Fläche Teile unterhalb der x-Achse besitzt, weswegen wir möglicherweise den Integrationsbereich aufteilen und anschliessend die Beträge der Teilflächen addieren müssen.



In diesem Fall erkennen wir, dass die gesuchte Fläche eine Punktsymmetrie bezüglich eines Punktes auf der x-Achse aufweist. Der gesuchte Flächeninhalt ist daher doppelt so gross wie derjenige Teil, der oberhalb der x-Achse liegt.

Den Flächeninhalt A_{oben} erhalten wir, indem wir $f(x)$ von x_1 bis x_3 integrieren und anschliessend das Integral über $g(x)$ von x_1 bis x_2 subtrahieren:

$$A_{\text{oben}} = \int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx$$

Wir benötigen nun noch die Integrationsgrenzen x_1, x_2 und x_3:

- x_1 ist der erste gemeinsame Punkt der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ auf der rechten Seite der y-Achse. Da $f(x)$ eine um $\frac{1}{6}\pi \mathrel{\widehat{=}} 30°$ nach rechts verschobene Sinusfunktion darstellt, suchen wir zwei Argumente für die Sinus- und Cosinus-Funktion, die sich um $30°$ unterscheiden und denselben Funktionswert ergeben. Offensichtlich ist dies bei $30°$ und $60°$ der Fall:

$$\sin\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) \implies x_1 = \tfrac{1}{3}\pi$$

- x_2 ist die erste positive Nullstelle der Cosinus-Funktion, daher gilt:

  $x_2 = \frac{1}{2}\pi$

- x_3 ist die erste positive Nullstelle der um $\frac{1}{6}\pi$ nach rechts verschobenen Sinus-Funktion. Die Sinusfunktion besitzt diese Nullstelle genau an der Stelle π, bei der verschobenen Funktion $f(x)$ führt dies also direkt auf:

  $x_3 = \frac{7}{6}\pi$

Nun können wir die beiden Integrale einfach ausrechnen:

$$\begin{aligned}
A \;=\; 2 \cdot A_{\text{oben}} &= 2 \cdot \left[\int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx \;-\; \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx \right] \\
&= 2 \cdot \left[\int_{x_1}^{x_3} \sin\left(x - \tfrac{1}{6}\pi\right)\,dx \;-\; \int_{x_1}^{x_2} \cos(x)\,dx \right] \\
&= 2 \cdot \left[\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7}{6}\pi} \sin\left(x - \tfrac{1}{6}\pi\right)\,dx \;-\; \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx \right] \\
&= 2 \cdot \left[\Big[-\cos\left(x - \tfrac{1}{6}\pi\right) \Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7}{6}\pi} \;-\; \Big[\sin(x) \Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right] \\
&= 2 \cdot \Big[-\cos\left(\tfrac{7}{6}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\right) - \Big(-\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\right)\Big) \\
&\qquad - \Big(\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)\Big) \Big] \\
&= 2 \cdot \Big[-\cos(\pi) + \cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) - \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) \Big] \\
&= 2 \cdot \Big[-(-1) + \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \Big] \\
&= 2 \cdot \Big[1 - 1 + \sqrt{3} \Big] \\
&= 2 \cdot \sqrt{3} \quad \Big(\approx \; 3,464 \Big)
\end{aligned}$$

2.3 Kurvendiskussion

Durchführung einer vollständigen Kurvendiskussion

Um die charakteristischen Merkmale der zu untersuchenden Funktion besser ablesen zu können, überführen wir Zähler und Nenner von $h(x)$ in faktorisierte Darstellung:

- **Zähler faktorisieren** (Ausklammern)

  $$4x^2 - 4x \;=\; 4x \cdot (x-1)$$

- **Nenner faktorisieren** (Polynomdivision)

  Durch Probieren mit einfachen Werten findet man die Lösung $x = 2$, mit welcher der Nenner verschwindet. Wir dividieren daher durch den Faktor $(x-2)$:

  $$\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) : (x-2) \;=\; x^2 - 4x + 4 \\
\underline{-\;(x^3 - 2x^2)} \\
\quad\;\; -4x^2 + 12x \\
\quad\;\; \underline{-\;(-4x^2 + 8x)} \\
\qquad\qquad\quad 4x - 8 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-\;(4x-8)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

  Wir erkennen, dass sich der Term $x^2 - 4x + 4$ nach der zweiten binomischen Formel in der Form $(x-2)^2$ schreiben lässt, somit ergibt sich als faktorisierte Darstellung des Nenners:

  $$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \;=\; (x-2)\cdot(x^2 - 4x + 4) \;=\; (x-2)^3$$

- **Ganzen Bruch faktorisieren**

  $$h(x) \;=\; \frac{4x^2 - 4x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} \;=\; \frac{4x\cdot(x-1)}{(x-2)^3}$$

Nun bilden wir die ersten drei Ableitungen von $h(x)$. Hierbei belassen wir die Nenner in faktorisierter Darstellung, da wir später so beim Nullsetzen der Zähler einfacher erkennen können, ob die gefundenen Werte auch den Nenner Null werden lassen.

- **Erste Ableitung**

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(8x-4)\cdot(x-2)^3-(4x^2-4x)\cdot 3\cdot(x-2)^2}{(x-2)^6} \\ &= \frac{(8x-4)\cdot(x-2)-3\cdot(4x^2-4x)}{(x-2)^4} \\ &= \frac{8x^2-4x-16x+8-12x^2+12x}{(x-2)^4} \\ &= \frac{-4x^2-8x+8}{(x-2)^4} = -4\cdot\frac{x^2+2x-2}{(x-2)^4} \end{aligned}$$

- **Zweite Ableitung**

$$\begin{aligned} h''(x) &= -4\cdot\frac{(2x+2)\cdot(x-2)^4-(x^2+2x-2)\cdot 4\cdot(x-2)^3}{(x-2)^8} \\ &= -4\cdot\frac{(2x+2)\cdot(x-2)-4\cdot(x^2+2x-2)}{(x-2)^5} \\ &= -4\cdot\frac{2x^2+2x-4x-4-4x^2-8x+8}{(x-2)^5} \\ &= -4\cdot\frac{-2x^2-10x+4}{(x-2)^5} = 8\cdot\frac{x^2+5x-2}{(x-2)^5} \end{aligned}$$

- **Dritte Ableitung**

$$\begin{aligned} h'''(x) &= 8\cdot\frac{(2x+5)\cdot(x-2)^5-(x^2+5x-2)\cdot 5\cdot(x-2)^4}{(x-2)^{10}} \\ &= 8\cdot\frac{(2x+5)\cdot(x-2)-5\cdot(x^2+5x-2)}{(x-2)^6} \\ &= 8\cdot\frac{2x^2+5x-4x-10-5x^2-25x+10}{(x-2)^8} \\ &= 8\cdot\frac{-3x^2-24x}{(x-2)^6} = -24\cdot\frac{x^2+8x}{(x-2)^6} \end{aligned}$$

Nach dieser Vorarbeit beginnen wir mit der eigentlichen Kurvendiskussion:

- **Definitionsbereich**

  Anhand der faktorisierten Darstellung von $h(x)$ erkennen wir schnell, dass sich für $x = 2$ eine Division durch Null ergäbe. Alle anderen Werte für x sind erlaubt, für den Definitionsbereich gilt daher:

  $$\mathbb{D} \;=\; \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

- **Verhalten für $x \to \pm\infty$**

  Zur Grenzwertbildung verwenden wir die ausmultiplizierte Darstellung des Bruchs und dividieren durch den Term höchster Ordnung in demjenigen Teil des Bruchs, der von grösserem Grad ist – in diesem Fall der Nenner:

  $$\lim_{x \to \pm\infty} h(x) \;=\; \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{6}{x^2} + \frac{12}{x^2} - \frac{8}{x^3}} \;=\; \frac{0}{1} \;=\; 0$$

  Alle Terme mit x im Nenner streben offensichtlich gegen Null, somit ergibt sich als Grenzwert $\frac{0}{1} = 0$, die Funktion besitzt also die waagerechte Asymptote $y = 0$.

  Anmerkung: Da der Grad des Zählers kleiner als der des Nenners ist, lässt sich aus dieser Tatsache auch sofort schliessen, dass die Funktion die waagerechte Asymptote $y = 0$ besitzt.

- **Verhalten in der Umgebung von Definitionslücken**

  Da der Nenner der Funktion $h(x)$ für $x_{\mathrm{P}} = 2$ verschwindet, der Zähler für diesen Wert aber ungleich Null bleibt, liegt an dieser Stelle ein Pol vor. Es bleibt nun zu klären, ob die Funktion links und rechts von dieser Polstelle jeweils gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt.

  $$\lim_{x \to 2-} \frac{4x \cdot (x-1)}{(x-2)^3} \;=\; -\infty \,, \quad \lim_{x \to 2+} \frac{4x \cdot (x-1)}{(x-2)^3} \;=\; +\infty$$

  Die Ergebnisse erhält man aus einer Vorzeichenüberlegung: Der Zähler ist in beiden Fällen positiv, der Nenner bei Annäherung von links negativ, bei Annäherung von rechts dagegen positiv.

- **Achsenschnittpunkte**

  Der Schnittpunkt mit der y-Achse bestimmt sich einfach durch Einsetzen von $x_{\mathrm{Y}} = 0$ in den Funktionsterm. Wir erhalten:

$$h(0) \;=\; \frac{4 \cdot 0 \cdot (0-1)}{(0-2)^3} \;=\; \frac{0}{-8} \;=\; 0$$

  Der Graph von $h(x)$ verläuft also durch den Koordinatenursprung. Somit haben wir auch bereits eine Nullstelle der Funktion gefunden:

$$x_{\mathrm{N1}} = x_{\mathrm{Y}} = 0$$

  Die weiteren Nullstellen erhalten wir durch Nullsetzen des Zählers:

$$4x \cdot (x-1) \;\stackrel{!}{=}\; 0 \qquad \stackrel{\text{für } x \neq 0}{\Longrightarrow} \qquad x_{\mathrm{N2}} \;=\; 1$$

- **Extremalstellen**

  Die kritischen Punkte (diejenigen Punkte, die für Extremalstellen überhaupt in Frage kommen), erhalten wir, indem wir die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen:

$$h'(x) \;=\; -4 \cdot \frac{x^2 + 2x - 2}{(x-2)^4} \;\stackrel{!}{=}\; 0$$

  Dieser Term wird genau dann Null, wenn der Zähler des Bruchs verschwindet, der Nenner aber ungleich Null bleibt. Daher bestimmen wir die Nullstellen des Zählers und müssen danach prüfen, dass für diese Werte der Nenner nicht ebenfalls verschwindet:

$$x^2 + 2x - 2 \;\stackrel{!}{=}\; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_{1,2} \;=\; \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} \;=\; -1 \pm \sqrt{3}$$

  Der Nenner verschwindet nur für $x = 2$, daher sind die beiden kritischen Punkte $x_{\mathrm{E1}} = -1 - \sqrt{3}$ und $x_{\mathrm{E2}} = -1 + \sqrt{3}$.

- **Extremalstellen** (Fortsetzung)

  Nun müssen wir die gefundenen Werte in die zweite Ableitung einsetzen. Hierbei genügt es, das Vorzeichen des Ergebnisses bestimmen zu können. Da beide Werte kleiner als 2 sind, lässt sich bereits aussagen, dass der Nenner der zweiten Ableitung in beiden Fällen negativ sein wird. Wir prüfen daher nur noch die Vorzeichen der beiden Zähler:

$$\begin{aligned} x^2+5x-2\Big|_{x=-1-\sqrt{3}} &= (-1-\sqrt{3})^2+5\cdot(-1-\sqrt{3})-2 \\ &= 1+2\cdot\sqrt{3}+3-5-5\cdot\sqrt{3}-2 \\ &= \ -3-3\cdot\sqrt{3}\ <\ 0 \end{aligned}$$

  Da der Nenner ebenfalls negativ ist, ist der Wert der zweiten Ableitung bei x_{E1} positiv, folglich befindet sich dort ein lokales Minimum.

  Für x_{E2} ergibt dasselbe Vorgehen:

$$\begin{aligned} x^2+5x-2\Big|_{x=-1+\sqrt{3}} &= (-1+\sqrt{3})^2+5\cdot(-1+\sqrt{3})-2 \\ &= 1-2\cdot\sqrt{3}+3-5+5\cdot\sqrt{3}-2 \\ &= \ -3+3\cdot\sqrt{3}\ >\ 0 \end{aligned}$$

  Da der Nenner negativ ist, ist der Wert der zweiten Ableitung hier negativ, folglich befindet sich bei x_{E2} ein lokales Maximum.

  Auf das Berechnen der Funktionswerte an den Stellen x_{E1} und x_{E2} verzichten wir an dieser Stelle, da das Ausmultiplizieren des Binoms im Nenner der Funktion ohne numerische Annäherung der Werte keine ungefähre Vorstellung von der Grössenordnung der Funktionswerte liefern kann. Stattdessen beschränken wir uns auf numerische Näherungswerte an den beiden Stellen:

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{E1}} &\approx -0{,}385 \\ x_{\mathrm{E2}} &\approx 0{,}385 \end{aligned}$$

- **Wendestellen**

  Diejenigen Punkte, die für Wendestellen in Frage kommen, erhalten wir, indem wir die Nullstellen der zweiten Ableitung bestimmen:

  $$h''(x) \;=\; 8 \cdot \frac{x^2 + 5x - 2}{(x-2)^5} \;\stackrel{!}{=}\; 0$$

  Dieser Term wird genau dann Null, wenn der Zähler des Bruchs verschwindet, der Nenner aber ungleich Null bleibt. Daher bestimmen wir die Nullstellen des Zählers und müssen danach prüfen, dass für diese Werte der Nenner nicht ebenfalls verschwindet:

  $$x^2 + 5x - 2 \;\stackrel{!}{=}\; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_{1,2} \;=\; \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \;=\; \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

  Der Nenner verschwindet nur für $x = 2$, daher sind die beiden in Frage kommenden Punkte für Wendestellen $x_{\mathrm{W1}} = -1 - \sqrt{3}$ und $x_{\mathrm{W2}} = -1 + \sqrt{3}$.

  Nun müssen wir die gefundenen Werte in die dritte Ableitung einsetzen. Hierbei genügt es, das Vorzeichen des Ergebnisses bestimmen zu können. Der Nenner wird offensichtlich nie negativ, den negativen Vorfaktor müssen wir allerdings berücksichtigen. Wir prüfen nun nur noch die Vorzeichen der beiden Zähler:

  $$\begin{aligned} x^2 + 8x\,\Big|_{x=\frac{-5-\sqrt{33}}{2}} &= \left(\frac{-5-\sqrt{33}}{2}\right)^2 + 8 \cdot \frac{-5-\sqrt{33}}{2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(25 + 10 \cdot \sqrt{33} + 33\right) - 20 - 4 \cdot \sqrt{33} \\ &= \frac{29}{2} + \frac{5}{2} \cdot \sqrt{33} - 20 - 4 \;\cdot \sqrt{33} \\ &= -\,\frac{11}{2} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{33} \;<\; 0 \end{aligned}$$

  Zusammen mit dem negativen Vorfaktor ergibt sich ein positiver Wert für die dritte Ableitung, folglich befindet sich bei x_{W2} eine Wendestelle von einer Rechts- in eine Linkskurve.

- **Wendestellen** (Fortsetzung)

  Für x_{W2} ergibt dasselbe Vorgehen:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 8x \,\Big|_{x=\frac{-5+\sqrt{33}}{2}} &= \left(\frac{-5+\sqrt{33}}{2}\right)^2 + 8 \cdot \frac{-5+\sqrt{33}}{2} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left(25 - 10 \cdot \sqrt{33} + 33\right) - 20 + 4 \cdot \sqrt{33} \\
&= \frac{29}{2} - \frac{5}{2} \cdot \sqrt{33} - 20 + 4 \;\cdot \sqrt{33} \\
&= -\frac{11}{2} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{33} \;>\; 0
\end{aligned}
$$

  Durch den negativen Vorfaktor ergibt sich ein negativer Wert für die dritte Ableitung, folglich befindet sich bei x_{W2} eine Wendestelle von einer Links- in eine Rechtskurve.

  Auf das Berechnen der Funktionswerte an den Stellen x_{W1} und x_{W2} verzichten wir an dieser Stelle, da die exakten Funktionswerte auch hier keine ungefähre Vorstellung von ihrer Grössenordnung liefern können. Wir beschränken uns auch hier auf numerische Näherungswerte an den beiden Stellen:

$$
\begin{aligned}
x_{\text{W1}} &\approx -0,342 \\
x_{\text{W2}} &\approx 0,217
\end{aligned}
$$

- **Skizze**

  Zum Schluss erstellen wir eine Skizze auf Basis der durch die Kurvendiskussion gewonnenen Resultate: